12/1/2016

Κεφάλαιο 3: Σύνολα καλά διατεταγμένα

$A \simeq B \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \exists f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$
αμφ.

• $A \gtrsim B \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} (\exists \Gamma \subseteq A)\, B \simeq \Gamma$

Το A υπερισχύει του B

Το A υπερισχύει του B όταν το B είναι ισοδύναμο με το Γ (κομμάτι του A) το οποίο είναι ένα υποσύνολο του A. Χωρίς να αποκλείεται το Γ να είναι όλο το A.

• Τότε $\exists f: B \to A$

• $A > B \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} A \gtrsim B \wedge A \not\simeq B$

δεν είναι ισοδύναμα

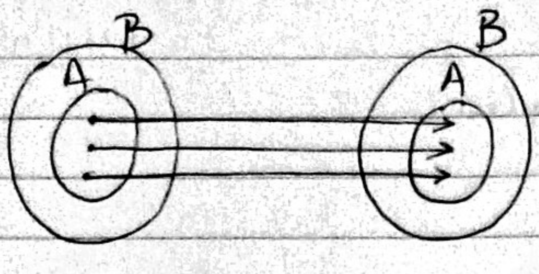
(A υπερισχύει γνήσια του B)

Ιδιότητες:

$A \gtrsim B \leftrightarrow A > B$ ή $A \simeq B$

$A \subseteq B \to B \gtrsim A$

$A \gtrsim B \leftrightarrow B \lesssim A$



f: ταυτοτική συνάρτηση

$f: A \to B$

αμφ

• $A \precsim B \wedge B \precsim \Gamma \to A \precsim \Gamma$

$f: A \to B$ $g: B \to \Gamma$

αμφ αμφ.

Θ. (S-B): $A \succsim B \wedge B \succsim A \Rightarrow A \simeq B$

Για να είναι δυο σύνολα ισοδύναμα πρέπει να βρω μια συνάρτηση η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη του ενός συνόλου επι του άλλου.

$A \precsim A$

• Δεν ισχύει η αντισυμμετρική σχέση και άρα δεν είναι διάταξη

$A \succsim B \wedge B \succsim A \not\Rightarrow A = B$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) ...

(2,1) (2,2) (2,3) (3,4)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) ...

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Άρα υπάρχει αμφ. συνάρτηση f.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ (2):</u>

Έστω $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f(x) = (x, 1)$

$\Rightarrow \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Είναι αμφιμονοσήμαντη?

$f(x) = f(y) \Rightarrow (x,1) = (y,1) \Rightarrow x = y$ ■

Άρα η f αμφ.

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g(x,y) = 2^x(2y+1) \in \mathbb{N}$ όταν $\forall x, y \in \mathbb{N}$.

$\boxed{g(x,y) = g(z,w)} \Rightarrow 2^x(2y+1) = 2^z + (2w+1)$. Τότε $x = z$. Γιατί αν $x \neq z$

Έστω $x > z$

$\underbrace{2^{x-z}(2y+1)}_{\text{άρτιος}} = \underbrace{2w+1}_{\text{περιττός}}$ άτοπο.

Επομένως $x = z \Rightarrow 2y+1 = 2w+1 \Rightarrow y = w$. Τελικά $\boxed{(x,y) = (z,w)}$

Άρα η g είναι αμφ.

Τελικά $\mathbb{N} \precsim \mathbb{N}\times\mathbb{N} \wedge \mathbb{N}\times\mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν A απέραντο και $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A \simeq \mathbb{N}$.

↑ ταυτίζεται σε πλήθος (ισοδύναμο)

$A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A \precsim \mathbb{N}$

Αρκεί νδο $\mathbb{N} \precsim A$.

Το A απέραντο $\overset{\text{ικανή και αναγκαία συνθήκη}}{\iff} (\exists B \subseteq A)\ B \simeq \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \simeq B \precsim A \Rightarrow \mathbb{N} \precsim A$.

Άρα $A \precsim \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \precsim A \Rightarrow \boxed{A \simeq \mathbb{N}}$

(*)

ΠΡΟΤΑΣΗ: A απέραντο $\iff \mathbb{N} \precsim A$

Απόδειξη $(\Rightarrow)$ (*)

Απόδειξη $(\Leftarrow)$

Έστω ότι $\mathbb{N} \precsim A$. Τότε $\exists f: \mathbb{N} \to A$ 1-1

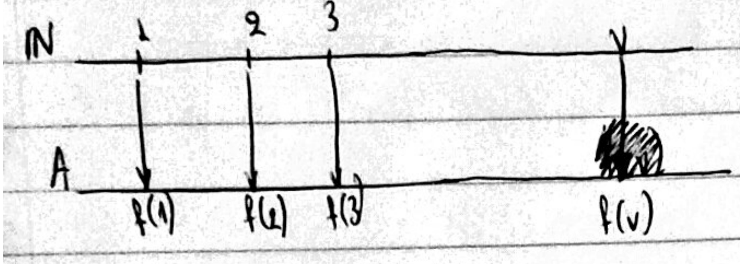
$\mathbb{N} \simeq R(f) \subseteq A \Rightarrow A$ απέραντο.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> A τπα $\Longleftrightarrow$ A <u>πεπερασμένο</u> ή αριθμήσιμο $(A \simeq \mathbb{N})$

$A \subseteq \mathbb{N}$

A αριθμήσιμο $\Longleftrightarrow \mathbb{N} \simeq A \Longleftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επί}} A$

αμφ



$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots\}$

Το $\mathbb{N}$ είναι απέραντο.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> A τπα $\Longleftrightarrow A \precsim \mathbb{N}$

$(\Longrightarrow)$ Έστω A τπα. Τότε το A είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Άρα ~~A πεπερασμένο~~ $A < \mathbb{N}$ ή $A \simeq \mathbb{N}$.

Άρα $A \precsim \mathbb{N}$.

Το A δεν μπορεί να είναι ίσο με το $\mathbb{N}$ διότι A: πεπερασμένο ενώ $\mathbb{N}$: απέραντο.

$(\Longleftarrow)$ Έστω ισχύει $A \precsim \mathbb{N}$. Άρα $\exists f : A \to \mathbb{N}$

αμ

$R(f) \subseteq \mathbb{N}$

Έστω $R(f)$ πεπερασμένο $\Longrightarrow R(f) < \mathbb{N}$ | $\to R(f)$ πεπερασμένο ή αριθμήσιμο

» $R(f)$ απέραντο $\xrightarrow{R(f) \subseteq \mathbb{N}} R(f) \simeq \mathbb{N}$ | Άρα $R(f)$ τπα

Αν $f: A \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{R}(f)$

αμφ $\Downarrow$

$A \simeq \mathbb{R}(f)$

Άρα αν A απα.

Άσκηση

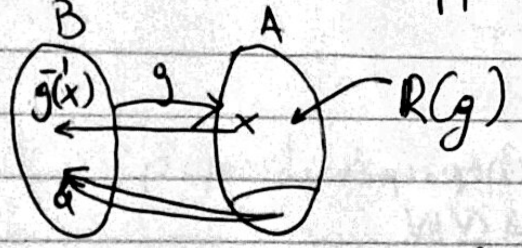
ΠΡΟΤΑΣΗ:

$A \succsim B \iff \exists f : A \xrightarrow{\text{επί}} B$

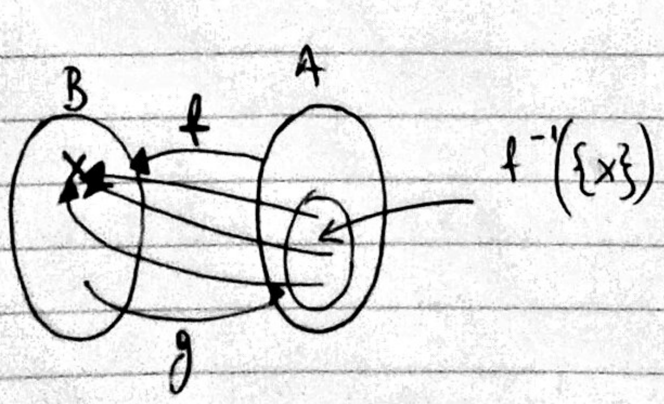
συναρ

$(\Rightarrow)$ Έστω $A \succsim B \overset{\text{ορ.}}{\iff} \exists g : B \to A$

αμφ



$$f(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), & x \in R(g) \\ a, & x \in A - R(g) \end{cases}$$



$(\Leftarrow)$

Έστω $\exists f: A \xrightarrow{\text{επί}} B$ $\quad f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ $\quad \alpha_x \in f^{-1}(\{x\})$

$g(x) = \alpha_x$

$g: B \to A \quad , g(x) = \alpha_x$

$g(x) = g(y) \Rightarrow \alpha_x = \alpha_y \Rightarrow f^{-1}(\{x\}) \cap f^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(\{x\} \cap \{y\}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\boxed{f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)}$ $\qquad \{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow x = y.$

Άρα η g είναι αμφιμονοσήμαντη.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

A τπα $\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επι}} A$